Sucesiones gráficas.

Def. Una sucesión de enteros no negativos se dice que es gráfica si es la sucesión de grados de un grafo.

¿Es gráfica 4 2 2 3 1 1? → NO, $\sum_{v\in V} \overset{\text{grados}}{d(v)} = 2\cdot|A|$

Grafos simples. Propiedades.

Una sucesión no creciente de enteros no negativos $s, t_1, t_2, \ldots t_s, d_1, d_2, \ldots, d_r$ es gráfica (para grado simple) si y sólo si $t_1-1, t_2-1, \ldots, t_s-1, d_1, d_2, \ldots, d_r$ es gráfica.

Demostración (idea)

vértices →	v	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1
	4	3	2	2	2	1
	s	t_1	t_2	t_3	t_4	d_1

es gráfica →

"a las 4 primeras les resto 1"

4 3 2 2 2 1

2 1 1 1 1

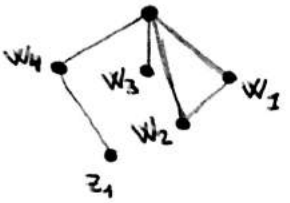
0 0 1 1

0 1 1

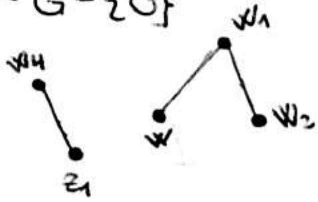
1 1

0

→ No tenemos números negativos; por tanto, es una sucesión gráfica.



$G' = G - \{0\}$



Caso donde v no es adyacente a alguno de los s vértices

vértices →	v	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1
	4	3	3	3	3	2
	s					

→ 4 3 3 3 3 2

2 2 2 2 2

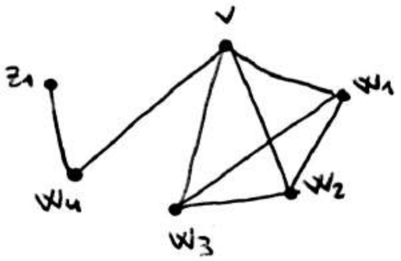
1 1 2 2

2 2 1 1

1 0 1

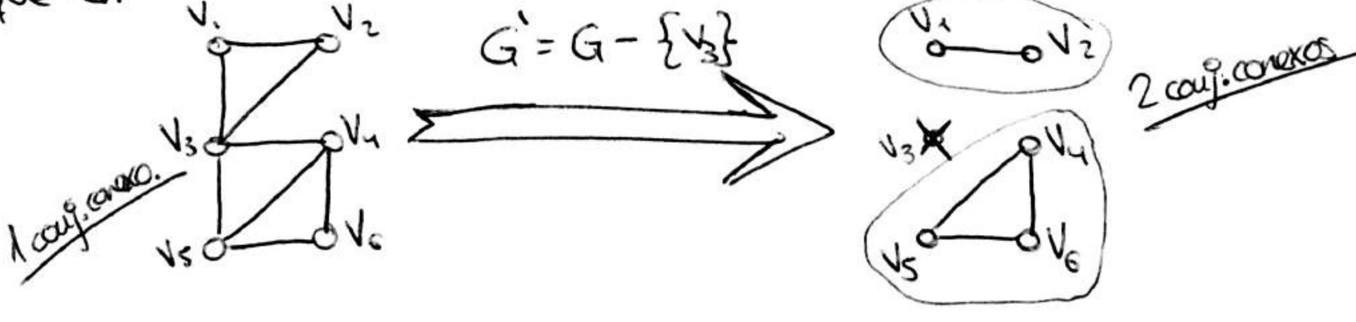
1 1 0

0 0



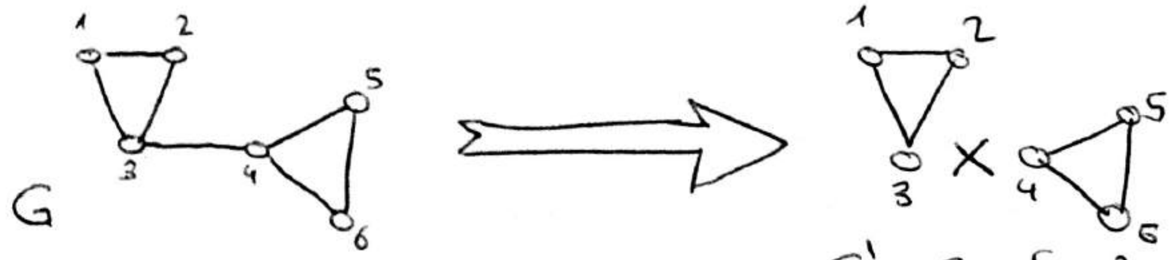
Vértice de corte.

$v \in V$ se dice que es vértice de corte si $G - \{v\}$ tiene más componentes conexas que G.



Arista puente

Una arista $e \in A$ es arista puente si $G - \{e\}$ tiene más componentes conexas con G.

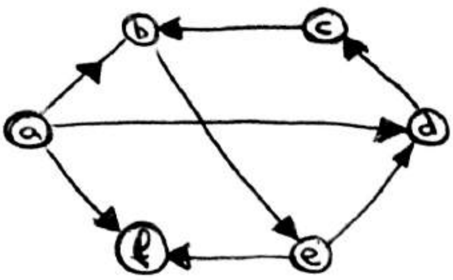


$G' = G - \{3\text{-}4\}$

Digrafos. $D = (v, a)$

Una arista es un par ordenado de vértices (u,v) arco $\equiv uv$

$\{u,v\}$ arista



$d^+(v) =$ salientes

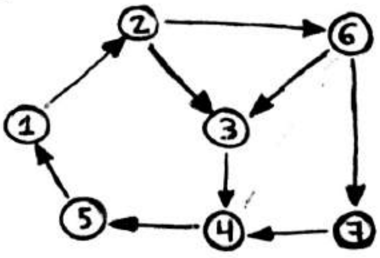
$d^-(v) =$ entrantes

$d^+(a) = 3$	$d^+(b) = 1$	$d^+(c) = 1$	$d^+(d) = 2$	$d^+(e) = 2$	$d^+(f) = 0$
$d^-(a) = 0$	$d^-(b) = 2$	$d^+(c) = 1$	$d^-(d) = 2$	$d^-(e) = 1$	$d^-(f) = 2$

¿Recorrido de a a e? → Sí: $a \ (a,b) \ b \ (b,e) \ e$

¿Recorrido de d a a? → No.

Ejercicio.



1. Lista de grados. $(d^+(v), d^-(v))$.
2. Matriz de adyacencia.
3. Recorrido cerrado con inicio en 1 y que pase por todos los vértices del digrafo (al menos una vez).
4. Estudiar si D es fuertemente conexo

1.

	1	2	3	4	5	6	7
Salientes, $d^+(v)$	1	2	1	2	1	2	1
Entrantes, $d^-(v)$	1	1	2	2	1	2	1

2.

$$\begin{array}{cc} & b \\ a & \left(\begin{matrix} 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \end{matrix}\right) \end{array}$$

¿a → b? Sí = 1. No = 0.

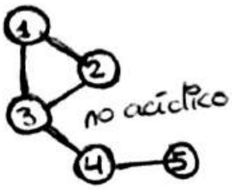
3. 1 (1,2) 2 (2,6) 6 (6,7) 7 (7,4) 4 (4,6) 6 (6,3) 3 → (3,4) 4 (4,5) 5 (5,1) 1

4. Sí es fuertemente conexo porque existe un camino de u a v para todo u, v.

Árboles.

Un grafo es acíclico si no contiene ciclos.

Un grafo es un árbol si es conexo y acíclico.



Teorema.

Sea $T = (V, A)$ un grafo simple. Son equivalentes:

a) T es un árbol

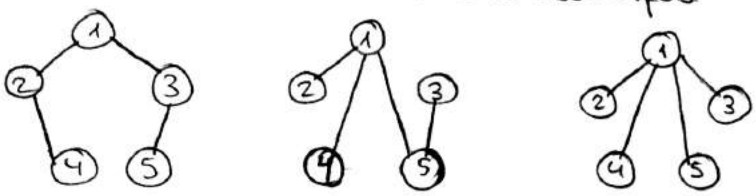
b) T es conexo y todas sus aristas son puente

c) T es conexo y $|A| = |V| - 1$

d) T es acíclico y $|A| = |V| - 1$

e) Para cada par de vértices distintos $u, v \in V$, existe un único camino de u a v.

2.3 Todos los árboles de orden 5 no isomorfos



2.6 T = árbol orden 21, 15 hojas y un vértice de grado 6. Grado de los restantes vértices: 3 ó 5. ¿Cuántos vértices de grado 5 hay?

15 vértices grado 1

1 vértice grado 6

5 vértices grado 3 ó 5

aristas
$|A| = 20$ $\qquad \sum_{v \in V} d(v) = 15 + 6 + 3x + 5(5-x)$ | $\sum d(v) = 2 \cdot |A|$

$15 + 6 + 3x + 5 \cdot (5 - x) = 40$

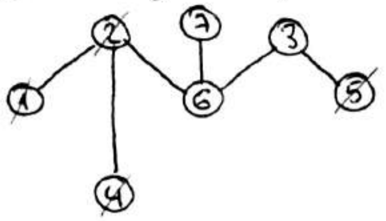
$3x + 25 - 5x = 19$

$-2x = -6$

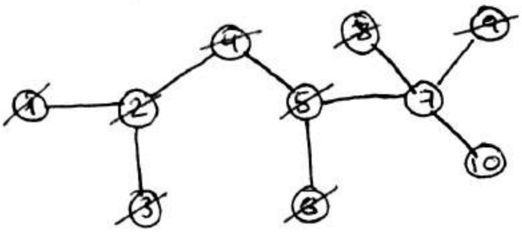
$\boxed{x = 3} \longrightarrow$ 3 de grado 3

$(5-3)$ de grado $5 = 2$ de grado 5

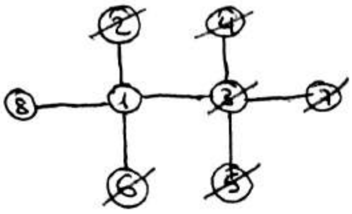
2.8 Dar el código de Prüfer.

a) 

C=(2,2,6,3,6)

b) 

C= (2,2,4,5,5,7,7,7)

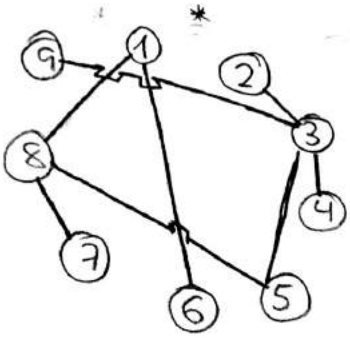
c) 

C=(1,3,3,1,3,1)

2.9. Construir el árbol cuya secuencia de Prüfer es:

a) $C=(\cancel{3},\cancel{3},\cancel{1},\cancel{8},\cancel{8},\cancel{8},\cancel{3})$

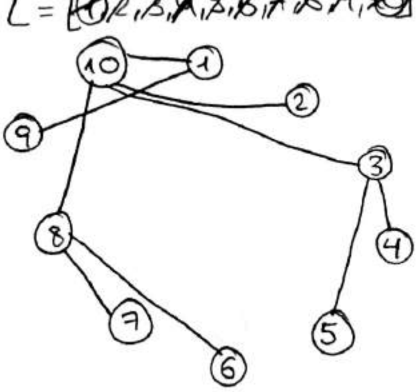
$L=[\cancel{1},\cancel{2},3,\cancel{4},\cancel{5},\cancel{6},\cancel{7},\cancel{8},\boxed{9}]$



El primero de L que no aparece en C se une con el primero en C.
Tachamos en C y en L los que tenemos unido
BUCLE.
Cuando queden dos vértices en L, los unimos.
END.

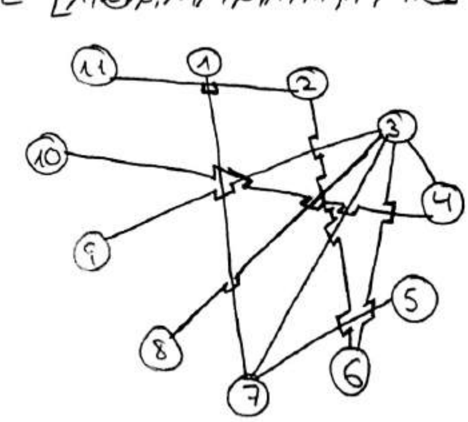
b) $C=(\cancel{10},\cancel{3},\cancel{3},\cancel{10},\cancel{8},\cancel{8},\cancel{10},\cancel{1})$

$L=[1,\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},\cancel{5},\cancel{6},\cancel{7},\cancel{8},\cancel{9},\boxed{10}]$

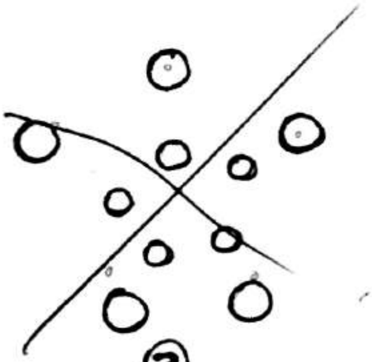


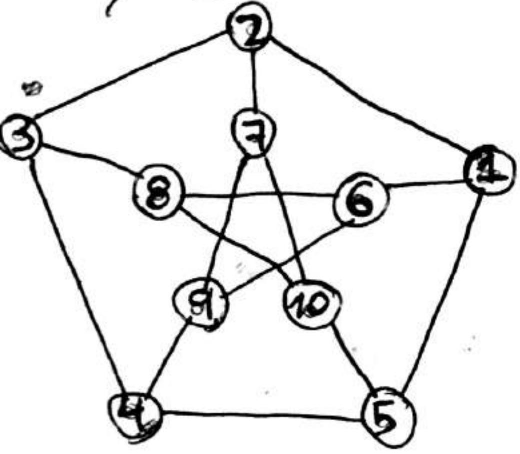
c) $C=(\cancel{7},\cancel{7},\cancel{3},\cancel{3},\cancel{3},\cancel{4},\cancel{3},\cancel{6},\cancel{7})$

$L=[\cancel{1},2,\cancel{3},\cancel{4},\cancel{5},\cancel{6},\cancel{7},\cancel{8},\cancel{9},\cancel{10},\boxed{11}]$

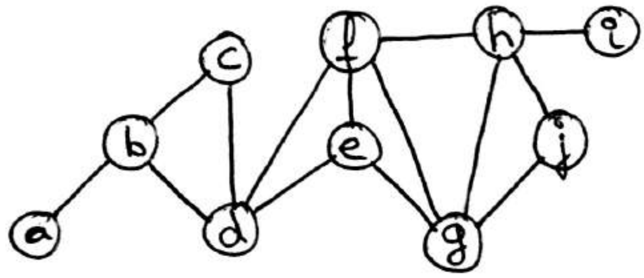


Búsqueda en anchura





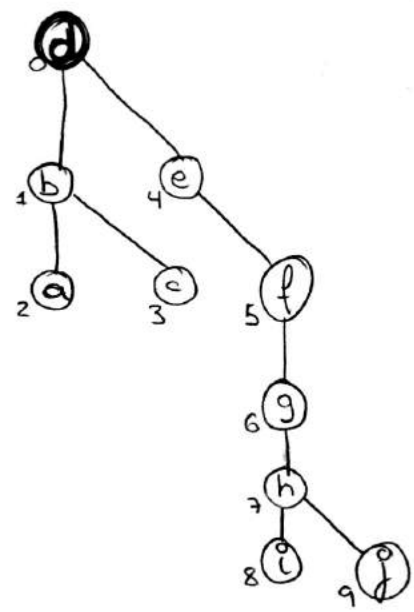
2.21



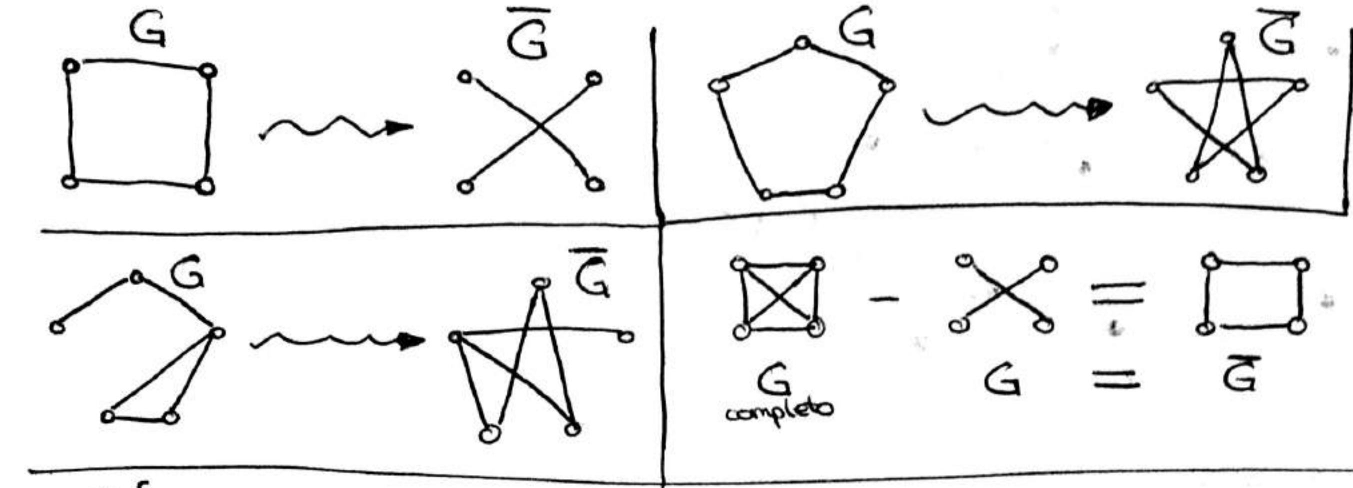
Si aplicamos el algoritmo de búsqueda en profundidad (DFS) de forma ordenada,

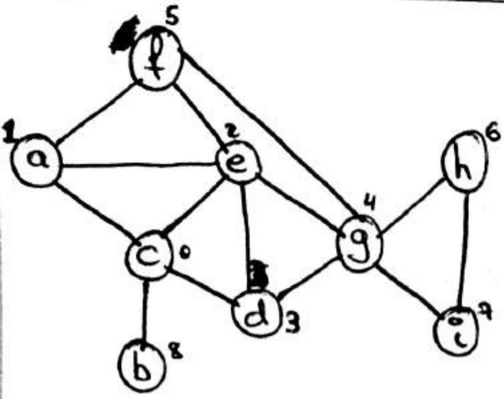
a) ¿Cuál de los vértices del conjunto $\{d, j, e\}$ produce un árbol de mayor altura al elegirlo como vértice inicial?

a)



Complementario de un grafo.





① DFS (árbol búsqueda en profundidad) → etiquetado $df(v)$ $\forall v \in V$

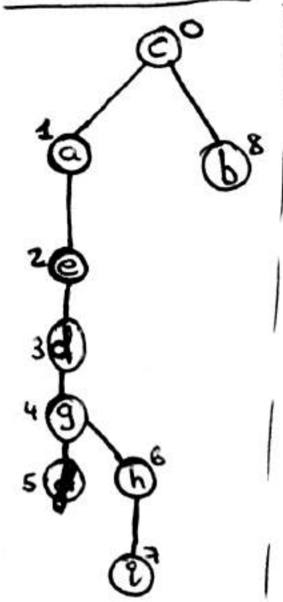
② Etiquetado $low(v) = \min \begin{cases} df(v) \\ df(z)\ \forall z \text{ tal que } \{v,z\} \text{ es arista de } G \notin T \\ low(w)\ \forall w \text{ hijo de } v \end{cases}$

③ Vértices de corte.

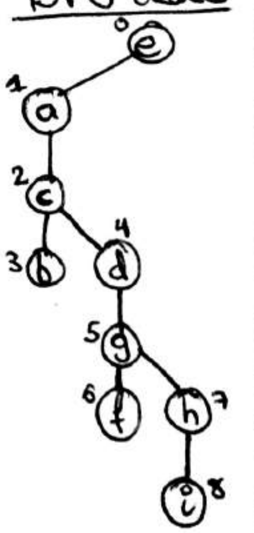
(i) La raíz r de T es vértice-corte $\Leftrightarrow$ r tiene más de un hijo

(ii) Si $v \neq r$, v es vértice-corte $\Leftrightarrow$ v tiene un hijo w tal que $low(w) \geq df(v)$

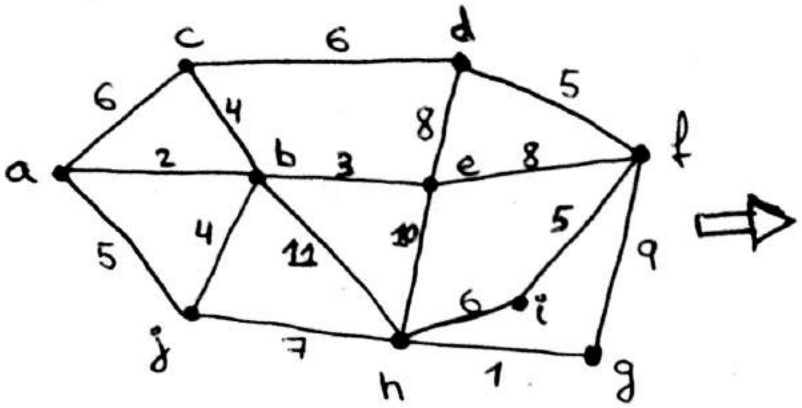
DFS desde C



DFS desde E



Grafos con peso



Algoritmo de PRIM.

Entrada: Un grafo $G=(V,A)$ con n vértices y pesos en las aristas.

Salida: Un árbol T generador de G de mínimo peso.

- Elegir un vértice u de G e inicializar un árbol $T=\{u\}$
- Inicializar el conjunto de aristas frontera de T como vacío.

Mientras el número de arista de T es menor que $n-1$:

- Actualizar el conjunto de aristas frontera de T.
- Sea e la arista frontera de T de mínimo peso.
- Añadir el extremo de e y la arista e al árbol T.

Algoritmo de Kruskal.

Entrada: Un grafo $G=(V,A)$ con n vértices y pesos en las aristas.

Salida: Un árbol T generador de G de mínimo peso.

- Ordenar las aristas del grafo en forma no decreciente de peso.
- Elegir la primera arista e de mínimo peso e inicializar $T=(\{\text{vértices extremos de } e\}, \{e\})$.

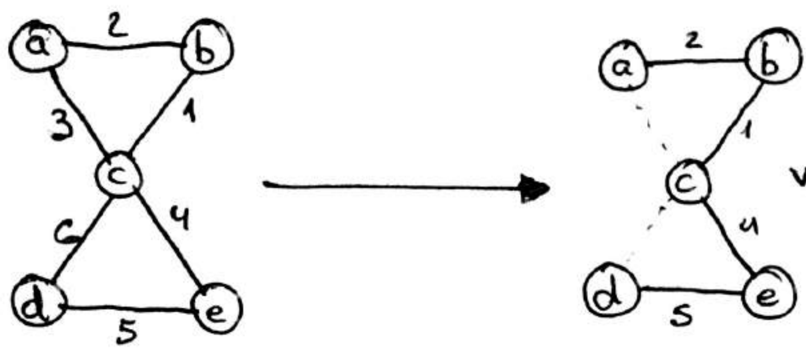
Mientras el número de arista de T es menos que $n-1$:

- Sea è la arista de mínimo peso tal que $è \notin T$ y no forme un ciclo al añadirla a T.
- Añadir la arista è, y sus extremos, al grafo T.

Árbol generador de ~~(segundo)~~ mínimo peso.

Tomás Miranda Perales

1 2 3 4 5 6
bc, ab, ac, ce, de, cd



$w = 12$

Distancia

Si G tiene un camino de u a v, entonces la distancia de u a v, escrita d(u,v), es la menor longitud posible de un camino de u a v.

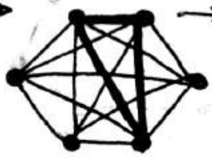
Excentricidad

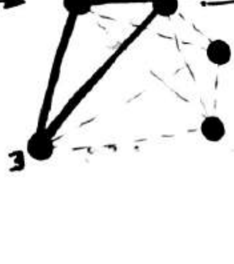
Teniendo fijado un vértice, consiste en encontrar cual de los otros vértices del grafo está a mayor distancia.

(3.9.) a) Cintura de K_n

n=4 →  → Ciclo mínimo = 3

n=5 →  → Ciclo mínimo = 3

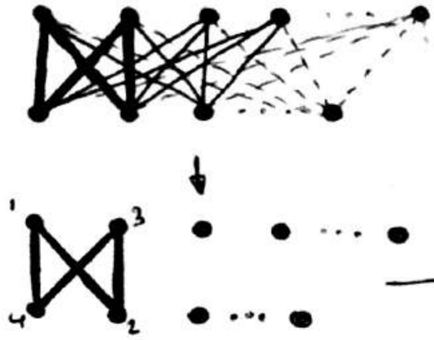
n=6 →  → Ciclo mínimo = 3

n →  → Ciclo mínimo = 3

Ciclo mínimo = 3

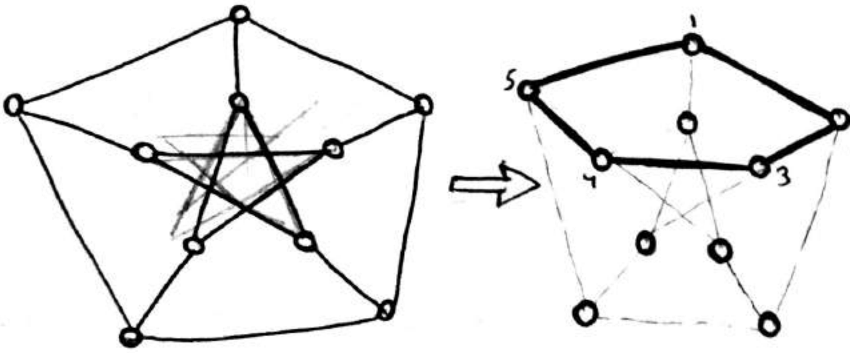
Cintura de $K_{r,s}$ — Tomas Miranda

R



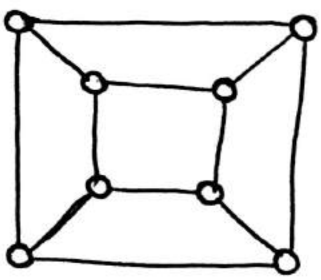
→ Ciclo mínimo = 4.

Petersen.



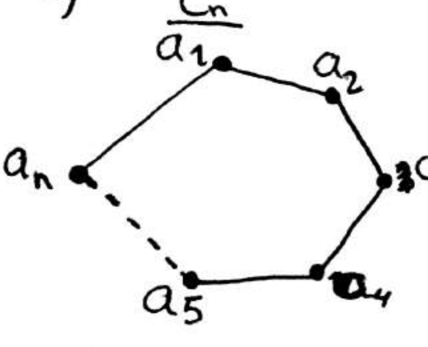
→ Ciclo mínimo = 5.

b) Grafo 3-regular, cintura = 4, menor nº vértices. $K_{3,3}$

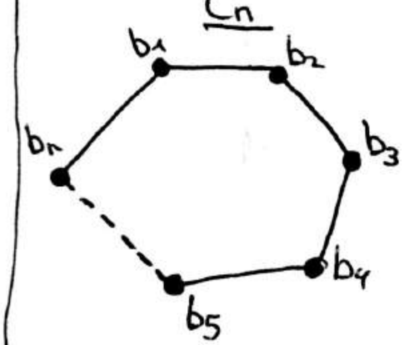


¿3-regular? Sí
¿Cintura=4? Sí
¿Menor nº vert? Sí

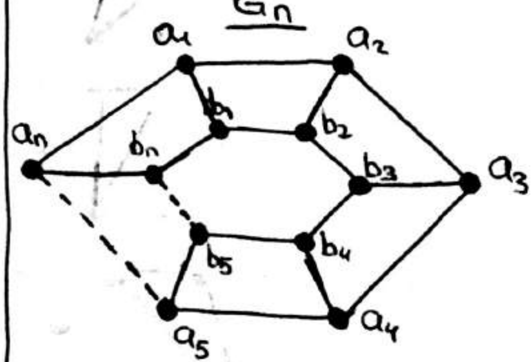
c)



$V=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\dots,a_n\}$



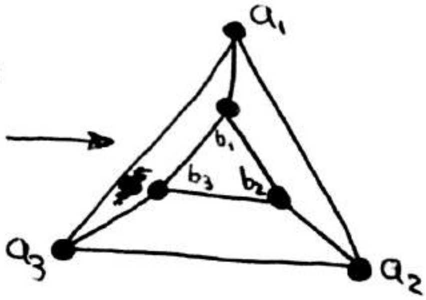
$V'=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,\dots,b_6\}$



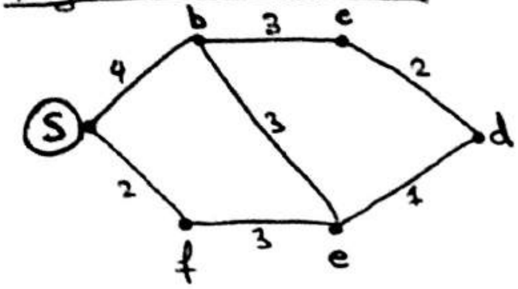
$V_G=\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,a_4,b_4,a_5,b_5,\dots,\dots,a_n,b_n\}$

La cintura de $G_n = 4$ si $n>3$

$G_A = 3$ si $n=3$ →

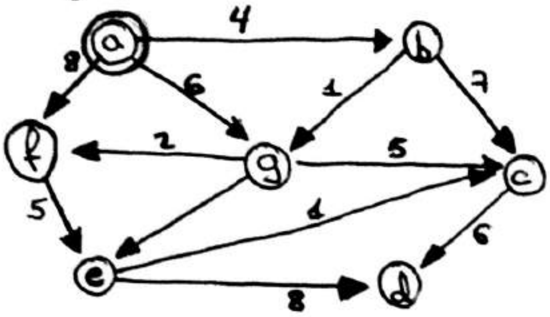


Algoritmo de DIJKSTRA.



	s	b	c	d	e	f	vért.	aris
1	0	4	∞	∞	∞	2	f	sf
2		4	∞	∞	5		b	sb
3			7	∞	5		e	fe
4			7	6			d	ed
5			7				c	bc

4.1. Dígrafo.



	a	b	c	d	e	f	g	ver.	ari.
1	0	4	∞	∞	∞	8	6	b	ab
2			11	∞		8	5	g	bg
3			10	∞	(9,g)	7		f	gf
4			10	∞	9			e	ge
5			10	17				c	gc
6									

Algoritmo para detectar ciclos.

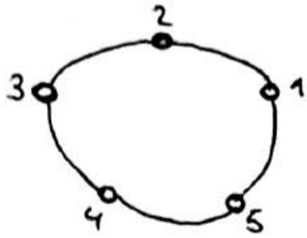
BFS con el siguiente etiquetado:

1. Se elige un vértice (r) y se le asigna $t(r)=0$. Sea $S=\{r\}$
2. Mientras $S \neq \emptyset$, sea $M = \{$todos los vecinos de los vértices de $S\}$. Si $M=\emptyset$, FIN
   - → Si $M=\emptyset$, FINAL. El grafo no tiene ciclos
   - → Si en M hay vértices etiquetados, FINAL. El grafo tiene ciclos.
   - → Si en M todos los vértices están sin etiquetar, sus vecinos se etiquetan con $t(z)+1$

Conectividad por vértices.

k-conexo

k-conexo si $k \leq K(G)$



Sí es 1-conexo
Sí es 2-conexo

Teorema (desigualdad de Whitney).

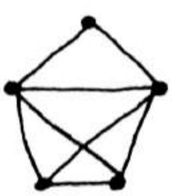
Se verifica que:

$K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, donde:
- $K(G)$: nº mínimo de vértices que quitamos para disconexo
- $\lambda(G)$: nº mínimo de aristas que quitamos para disconexo.
- $\delta(G)$: nº mínimo de grado (grado del vértice de menor grado).

K: kappa, λ: lambda, δ: delta

Demostración de "$\lambda(G) \leq \delta(G)$"

Eliminando las aristas que inciden en el vértice de grado mínimo $[\delta(G)]$ → se desconecta el grafo.



$\delta(G)=2$

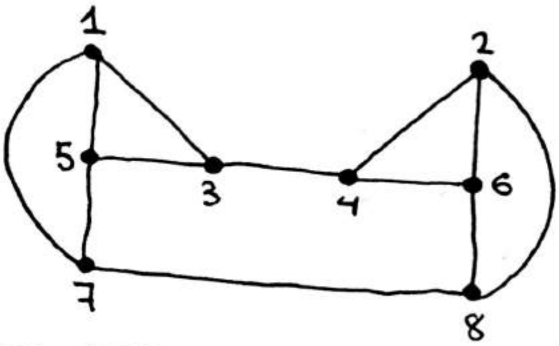
- Si $\lambda(G)=0 \rightarrow K(G)=0$
- Si $\lambda(G)=1 \rightarrow$ G es conexo con una arista puente. Un vértice extremo de la arista puente es vértice de corte. → $K(G)=1$
- Sea $\lambda(G)>1 \rightarrow$ eliminando "$\lambda(G)-1$" aristas del grafo, nos queda un subgrafo con una arista puente de extremos "u" y "v". Dicho subgrafo lo llamamos W (omega).

W = {vértices extremos de las aristas eliminadas distinto del extremo "u" ó "v"}

- Si $G-W$ es no conexo $\rightarrow K(G) < \lambda(G)$
- Si $G-W$ es conexo $\rightarrow G(W \cup \{u\})$ es no conexo $\Rightarrow K(G) = \lambda(G)$

Ejemplo:

1.



Conectividad por vértices.

Quitando $\{4\}$ y $\{8\}$ obtenemos un grafo no conexo, es decir:

$G-\{4,8\}$ es disconexo.

$\boxed{K(G)=2}$

Conectividad por aristas.

Quitando $\{\{3,4\}\}$ y $\{\{7,8\}\}$ obtenemos un grafo no conexo, es decir:

$G-\{\{3,4\},\{7,8\}\}$ es disconexo.

$\boxed{\lambda(G)=2}$

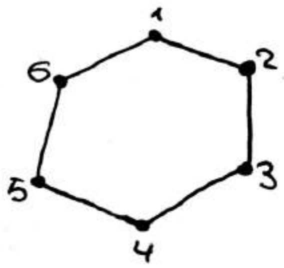
Grado.

El grafo es 3-regular, por lo cual:

$\boxed{\delta(G)=3}$

$\boxed{K(G) = \lambda(G) < \delta(G)}$

Definición: Dos caminos de "u" a "v" son caminos aristo-disjuntos si no tienen aristas en común.

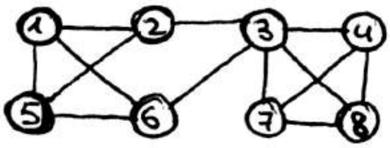


Para ir de 1 a 4 existen dos caminos aristo-disjuntos:

- 1 — 2 — 3 — 4.
- 1 — 6 — 5 — 4.

Teoría: Un grafo G es k-aristoconexo ⟷ Para cada par de vértices "u" y "v" del grafo G hay al menos K caminos aristo-disjuntos que unen "u" y "v".

Ejemplo:



Grado menor.

El grafo tiene como menor grado "3":

$\boxed{\delta(G)=3}$

Conectividad por aristas

$\boxed{\lambda(G)=2}$

Para cada par de vértices "u", "v" deben existir al menos dos caminos aristo-disjuntos.

Ejemplo: de 1 a 3:

1 — 2 — 3

1 — 6 — 3

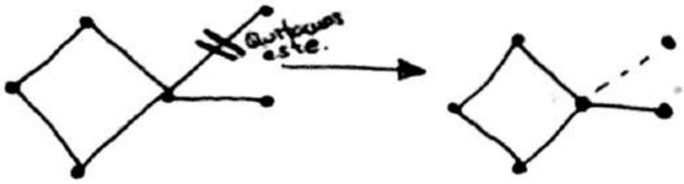
Conectividad por vértices.

$\boxed{K(G)=1}$

4.9. (1) Para los grafos unicíclicos, $\boxed{\lambda(G)=1}$

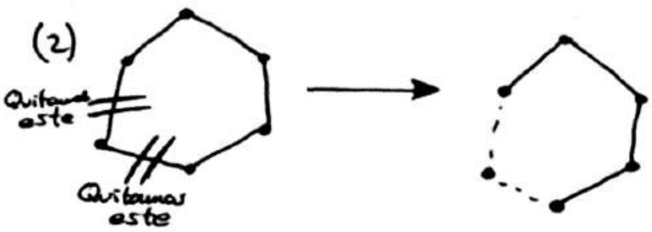
(2) Los grafos unicíclicos de vértice-conectividad 2 son los que están formados sólo por el ciclo.

(1)



Quitando un arista ya es disconexo.

(2)

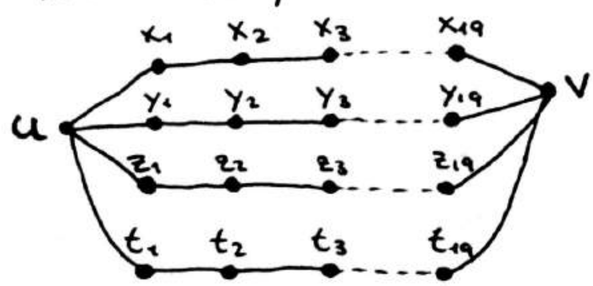


Quitando dos aristas ya es disconexo.

4.11. $\text{diam}(G)=20 \rightarrow \exists\, u,v \;/\; \text{dist}(u,v)=20$

$\underbrace{\cancel{\lambda}\, K(G)=4}$

Al menos hay 4 caminos aristodisjuntos entre cada u, v.



$$\underbrace{19}_{\text{vértices interiores.}} \cdot \underbrace{4}_{\text{conectiv. vértices.}} + \underbrace{2}_{\{u\},\{v\}} = \boxed{|V| \geq 78}$$

cota inferior.

4.13

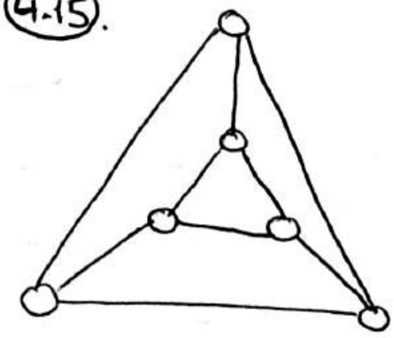
Floyd-Warshall.

Consiste en realizar iteraciones:

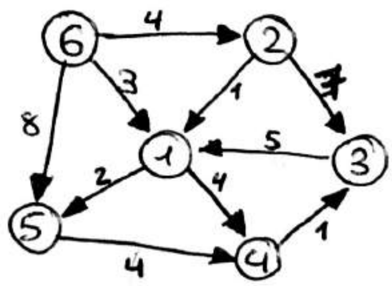
$$W^0 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{W^1_{ij} = \min\left\{W^0_{ij},\ W^0_{i1} + W^0_{1j}\right\}} \longrightarrow \boxed{W^n_{ij} = \min\left\{W^{n-1}_{ij},\ (W^n_{in} + W^n_{nj})\right\}}$$

4.15.



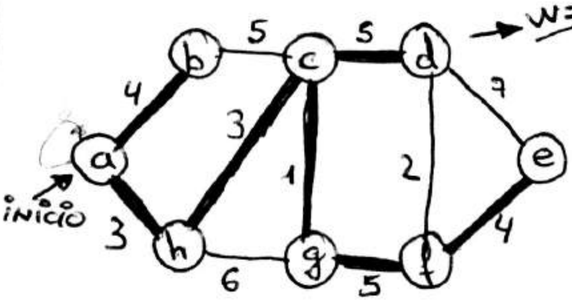
Ejemplo de Floyd-Warshall.



$$W^0 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & 4 & 2 & \infty \\ 1 & 0 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 5 & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 & \infty \\ 3 & 4 & \infty & \infty & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

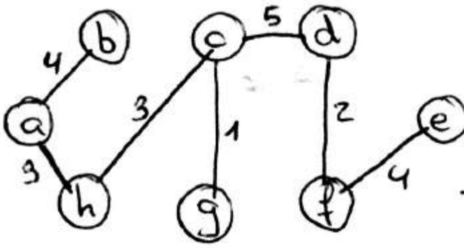
| con —

Dijkstra



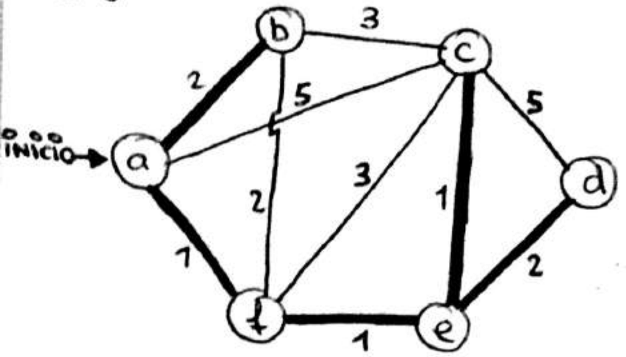
→ w=25

	a	b	c	d	e	f	g	h	V	arista
L_1	0	4	∞	∞	∞	∞	∞	3	h	ah
L_2	/	4	6	∞	∞	∞	9	/	b	ab
L_3	/	/	6	∞	∞	∞	9	/	c	hc
L_4	/	/	/	11	∞	∞	7	/	g	cg
L_5	/	/	/	11	∞	12	/	/	d	cd
L_6	/	/	/	/	18	12	/	/	f	fg
L_7	/	/	/	/	16	/	/	/	e	ef



→ w=22

Dijkstra

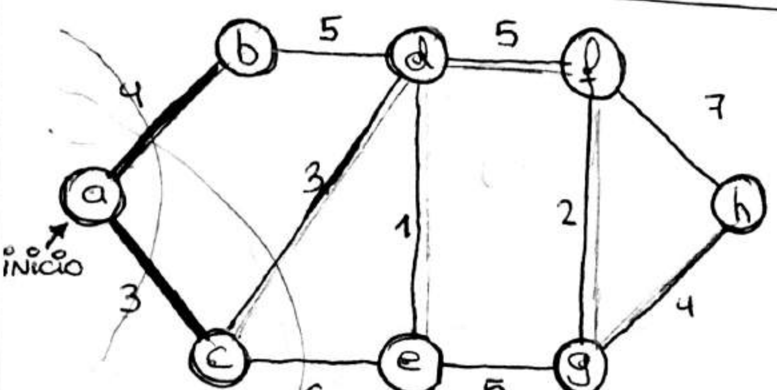


paso vértices disp. grado, vértice vecino

De "a" hasta:

- "b" = (a) —2— (b)
- "c" = (a) —1— (f) —1— (e) —1— (c)
- "d" = (a) —1— (f) —1— (e) —2— (d)
- "e" = (a) —1— (f) —1— (e)
- "f" = (a) —1— (f)

paso	vértices usables	grado(b), verticePartida(b)	g(c), vP(c)	g(d), vP(d)	g(e), vP(e)	g(f), vP(f)
0	{a}	2, a	5, a	∞	∞	1, a
1	{a, f}	2, a	3, f	∞	1, f	
2	{a, f, e}	2, a	1, e	2, e		
3	{a, f, e, c}	2, a		2, e		
4	{a, f, e, c, b}			2, e		
5	{a, f, e, c, b, d} terminado					



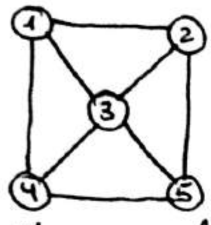
	a	b	c	d	e	f	g	h	V	arista
L_1	0	4	3	∞	∞	∞	∞	∞	c	ac
L_2	/	4	/	[illegible]	[illegible]	∞	∞	∞	d	cd
L_3	/	4	/	/	[illegible]	[illegible]	∞	∞	b	ab
L_4	/	4	/	/	/	5	5	∞	b	ab
L_5	/	/	/	/	/	5	5	∞	f	df
L_6	/	/	/	/	/	/	2	7	g	fg
L_7	/	/	/	/	/	/	/	4	h	gh

paso	vért. usables	g(b), vP(b)	c	d	e	f	g	h
0	{a}	4, a	3, a	∞	∞	∞	∞	∞
1	{a, c}	4, a		3, c	∞	∞	∞	∞
2	{a, c, d}	4, a			1, d	5, d	∞	∞
3	{a, c, d, e}	4, a				5, d	5, e	∞
4	{a, c, d, e, b}					5, d	5, e	∞
5	{a, c, d, e, b, f}						2, f	7, f
6	{a, c, d, e, b, f, g}							4, g
7	end							

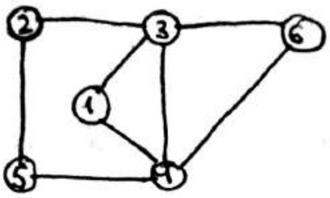
Recorridos Eulerianos y caminos Hamiltonianos.

- Recorrido Euleriano: aquel que pasa sólo una vez por cada arista del grafo.
- Grafo Euleriano: aquel que tiene un recorrido Euleriano cerrado (que empieza y acaba en el mismo vértice).

Cuando todos los vértices de un grafo son de grado par, entonces dicho grafo es Euleriano. Si no, no.



No es un grafo Euleriano.

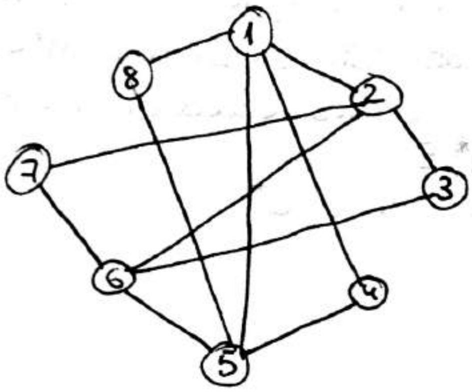


Si es un grafo Euleriano.

3 — 6 — 4 — 1 — 3 — 4 — 5 — 2 — 3

Algoritmo de Hierholzer.

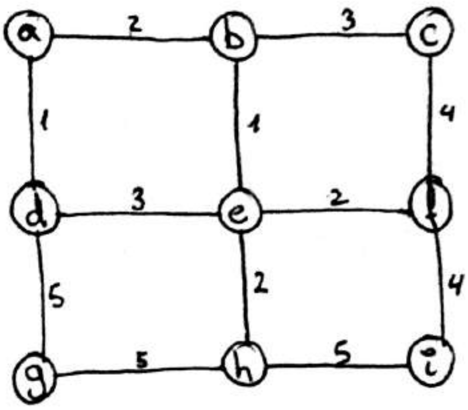
6.3 Aplicar el algoritmo de Hierholzer para hallar un recorrido euleriano cerrado, comenzando en 1 en este grafo:



$R_1 \equiv$ 1 — 4 — 5 — 8 — 1 → recorrido parcial

$R_2 \equiv$ 1 — 2 — 3 — 6 — 2 — 7 — 6 — 5 — 1 → fin

Problema del cartero.



• ¿Es Euleriano?
→ No, porque tiene vértices de grado impar. (4 vértices).

• Hallar recorrido de peso mínimo que, al menos una vez, pase por cada una de las aristas del grafo.

Algoritmo: Sea G un grafo conexo y S = {vértices de grado impar de G}.

①. Para cada par $u,v \in S$, sea $d_{u,v}$ el peso del camino de u a v.

②. Construir el grafo completo cuyo conjunto de vértices es S y asignar a cada arista el peso $d_{u,v}$.

③. Hallar un emparejamiento perfecto en K de peso mínimo.

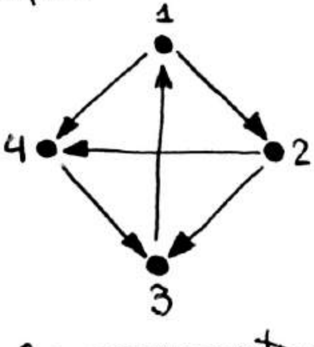
Def: Un emparejamiento M en un grafo $G=(V,A)$ es un subconjunto de aristas, $M \subset A$ tal que las aristas de M no tienen ningún extremo en común.
Un emparejamiento M es perfecto si todos los vértices del grafo G son extremo de alguna arista de M.

④. Añadimos al grafo G las aristas que forman parte del camino mínimo entre los vértices de cada arista de M y obtenemos un grafo G^* Euleriano.

⑤. Hallar un recorrido Euleriano en G^*

Campeonatos.

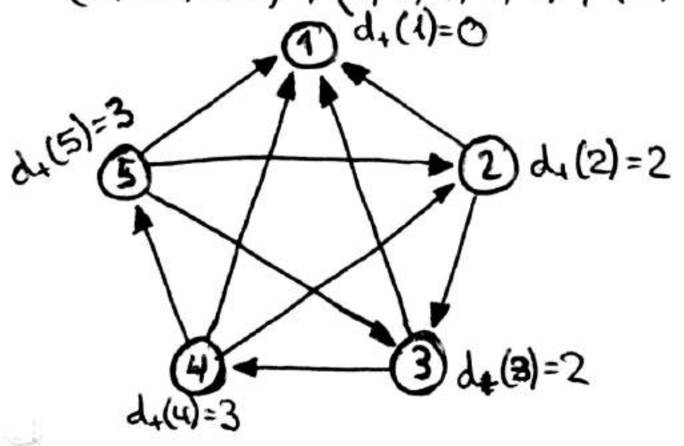
Un campeonato es una orientación en un grafo completo.
La puntuación de un vértice es su grado de salida



$d_+(1) = d_{salida}(1) = 2$
$d_+(2) = d_{salida}(2) = 2$
$d_+(3) = d_{salida}(3) = 1$
$d_+(4) = d_{salida}(4) = 1$

Sucesión de puntuaciones: $(2,2,1,1)$

Dibujar un campeonato con la sucesión de puntuaciones. ¿Son Hamiltonianas?
$(0,2,2,3,3)$, $(1,1,1,4,4)$, $(0,1,0,3,2)$



$$d_+^{sal}(v) + d_-^{ent}(v) = n-1$$

No Hamiltoniano
Sí Camino Hamiltoniano.

Un camino Hamiltoniano en G es un camino que contiene todos los vértices del grafo una sola vez (salvo $v_0 = v_n$ si el camino es cerrado).
Un grafo G es Hamiltoniano si admite un ciclo Hamiltoniano.

Teorema: Sea G un grafo simple con $|V| = n \geq 3$. ~~Si ∀ u,v / u,v no son~~
Si para todo par de vértices no adyacentes u y v, se cumple que $d(u) + d(v) \geq n$, entonces G es Hamiltoniano.
En particular, si $\forall v \in V$ se tiene $d(v) \geq \frac{n}{2} \rightarrow$ G es Hamiltoniano.

Proposición: Si G es Hamiltoniano $\rightarrow \forall v \in V$ se tiene $d(v) \geq 2$

Teorema: Si un grafo bipartido $G = (V, A)$ con $V = V_1 \cup V_2$ es Hamiltoniano, entonces $|V_1| = |V_2|$

Teorema: Si G es Hamiltoniano $\rightarrow$ Para todo $S \subset V$ se cumple que:

$$|\text{componentes conexas de } G - S| \leq |S|$$

Complejidad.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \begin{cases} 0 \rightarrow O(g) \subset O(f) \\ K \rightarrow O(g) = O(f) \\ \infty \rightarrow O(g) \supset O(f) \end{cases}$$

5.2. a) $3^n \in O(2^n)$ es falso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \lim \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

b) $\log n \in O(n^{1/2})$ es cierto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{1/2}} = 0$$

c) $n^{1/2} \in O(\log n)$ es falso

d) $(n+2)! \in O(n!)$ es falso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{n!} = \lim \frac{(n+2)(n+1)n!}{n} = \infty$$

e) $n \log n \in O(n^2 \log n)$ es cierto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^2 \log n} = 0$$

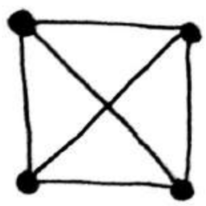
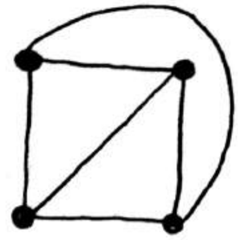
f)

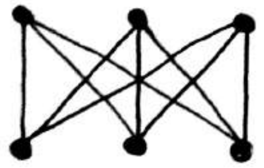
g)

h)

Planaridad

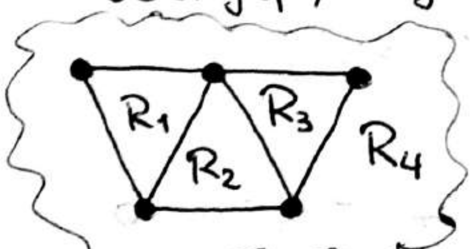
Def: Un grafo es planar si admite una representación en el plano de forma que sus aristas no se corten (salvo en los vértices). A dicha representación se le llama "grafo plano" ó "representación plana".

K_4  si es planar → 

$K_{3,3}$  no es planar.

En una representación plana se delimitan regiones en el plano:

$R = \{R_i$ tales que R_i es región delimitada por una representación plana de un grupo, incluyendo como región la región no acotada exterior$\}$

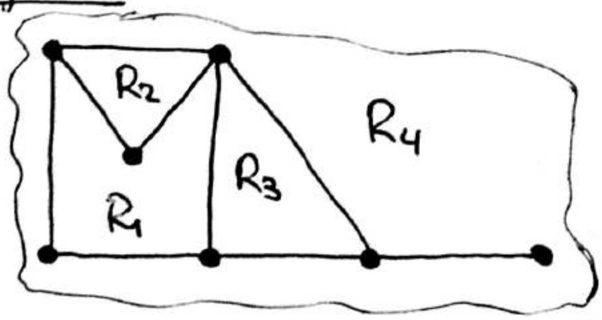


Def: grado (R_i) = nº de aristas de un recorrido mínimo cerrado por la frontera de R_i.

Se cumple que: $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \text{grado}(R_i) = 2 \cdot |A|}$

grado$(R_1) = 3$; grado$(R_2) = 3$; grado$(R_3) = 3$; grado$(R_4) = 5$.

Ejercicio.



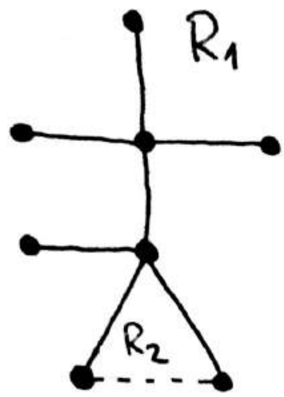
grado$(R_1) = 5$
grado$(R_2) = 3$
grado$(R_3) = 3$
grado$(R_4) = 7$

$2 \cdot |A| = \sum_{i=1}^{4} \text{grado}(R_i) = 18 \rightarrow \boxed{|A| = 9}$

$|V| = 7$ (nº vért)
$|A| = 9$ (nº aristas)
$|R| = 4$ (nº reg).

Teorema: Si G (grafo conexo y planar), entonces $|V| - |A| + |R| = 2$

Demostración: Si T es un árbol,



$n = |V|$ $\quad$ T (árbol) $=$ $q = n-1$

$q = |A|$ $\quad$ $n-(n-1)+1 = 2$

$r = |R|$

Si añadimos una arista, se forma una nueva región y la fórmula se cumple

Consecuencias de la fórmula de Euler:

①. Si G es un grafo conexo, planar y simple, entonces:

$|A| \leq 3|V| - 6$ $\quad$ $|V| = n$, $|A| = q$, $|R| = r$ $\quad$ $2q = \sum_{i=1}^{r} \text{grado}(R_i)$

$\text{grado}(R_i) \geq 3 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \text{grado}(R_i) \geq 3r \Rightarrow \boxed{2q \geq 3r}$

Por la Fórmula de Euler: $n - q + r = 2$

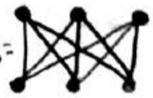
$3n - 3q + 3r = 6 \leq 3n - 3q + 2q = 3n - q \rightarrow q \leq 3n - 6$

¿$K_{3,3}$ es planar?

→ No tiene ciclos de longitud 3.

¿Se cumple $|A| \le 2\cdot|V|-4$? → ¿$9 \le 2\cdot 6-4$? → $9 \not\le 8$ → $\boxed{NO}$

→ $|V|=6$ $|A| = \frac{18}{2} = 9$

$K_{3,3}$= 

¿K_5 es planar?

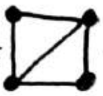
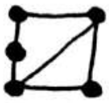
→ Sí tiene ciclos de longitud 3.

¿Se cumple $|A| \le 3\cdot|V|-6$? → ¿$10 \le 3\cdot 5-6$? → $10 \le 9$ → $\boxed{NO}$

→ $|V|=5$ $|A| = \frac{20}{2} = 10$

Def. Una subdivisión de un grafo G es otro grafo G' obtenido mediante la inserción de vértices de grado 2 en las aristas de G.

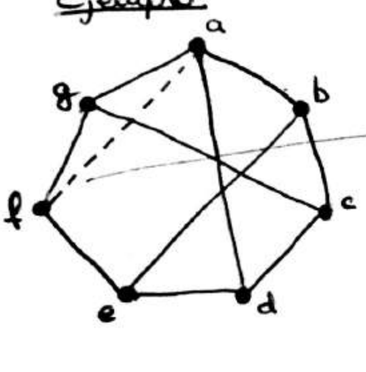
Ejemplo:

G=  → G'= 

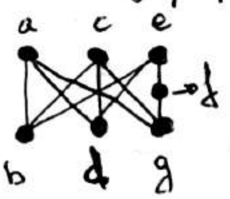
Teorema de Kuratowski.

Un grafo conexo es planar si y sólo si G no admite ningún subgrafo que sea una subdivisión de $K_{3,3}$ ó K_5.

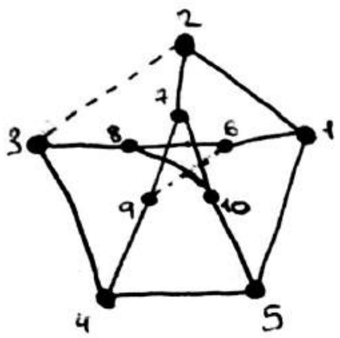
Ejemplo:



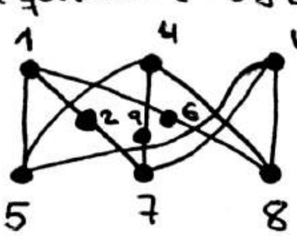
¿es planar? = ¿No tiene un subgrafo que sea una subdivisión de $K_{3,3}$?

G − {a, f} → 

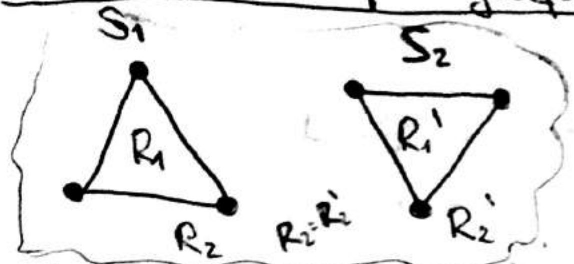
→ $\boxed{NO}$ es planar.



Si quitamos $\overbrace{\{2,3\} \text{ y } \{6,9\}}^{\text{aristas}}$, conseguimos una subdivisión del grafo $K_{3,3}$, $\boxed{NO}$ es planar.

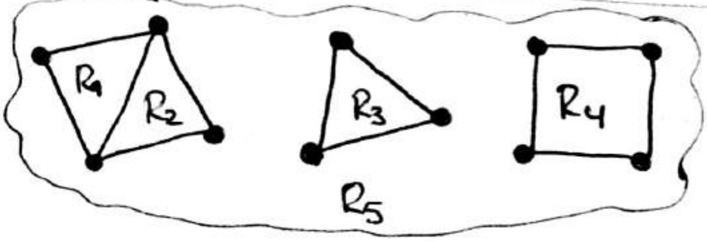


Fórmula de Euler para grafos no conexos.



$$|V|-|A|+|R| = 2+\{\text{nº componentes conexas} - 1\}$$
$$6 - 6 + 3 = 2+(2-1)$$
$$\underline{3 = 3}$$

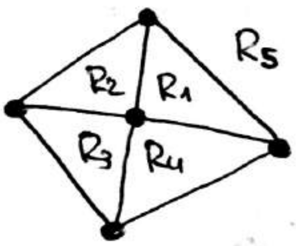
$$|V_1|-|A_1|+|R_1| = 2$$
$$|V_2|-|A_2|+|R_2| = 2$$



$$|V|-|A|+|R| = 2+\{\text{nº ctes. conexas} - 1\}$$
$$11 - 12 + 5 = 2+(3-1)$$
$$\underline{4 = 4}$$

Ejercicio

Dado un grafo planar cuya representación plana tiene 8 caras triangulares limitadas por una cara hexagonal no limitada. ¿Cuántas aristas tiene G? ¿Cuántos vértices?



- Tiene 8 triangulos:
  grado $(R_i) = 3 \quad [i=[1,8]]$
- Tiene 1 hexágono:
  grado $(R_a) = 6$

Como $\sum_{i=1}^{9} \text{grado}(R_i) = 2\cdot|A| \longrightarrow 8\cdot 3 + 6 = 2|A| \longrightarrow \boxed{|A| = 15}$

$$|V|-|A|+|R| = 2-\{\text{nº ctes. conexas} - 1\} \longrightarrow$$
$$\rightarrow |V| = 2-\{\text{nº ctes conexas} - 1\} + |A| - |R| \longrightarrow$$
$$\rightarrow |V| = 2-(1-1)+15-9 \longrightarrow \boxed{|V| = 8}$$

Ejercicio.

¿Puede existir un grafo planar conexo de 10 vértices sin ciclos de longitud 3 y con **18** aristas? $\longrightarrow$ ¿$|A| \leq 2\cdot|V| - 4$?

$18 \leq 2\cdot 10 - 4 \rightarrow \boxed{18 \leq 16 \rightarrow \text{NO}}$ no es planar.

¿Si G es un grafo conexo planar con 30 aristas y tal que el grado de cada vértice es al menos 4, ¿qué se puede decir sobre el número de regiones de G en una representación planar?

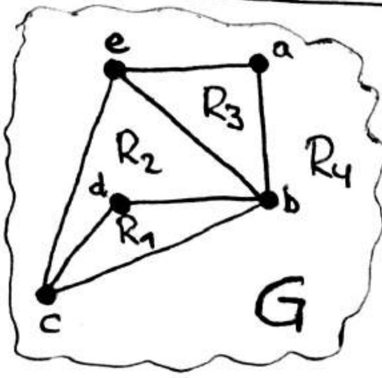
$|A| = 30$
$|V| = n$

$$2 \cdot 30 = \sum_{v \in V} \text{grado}(v) > 4n \longrightarrow 15 \geq n$$

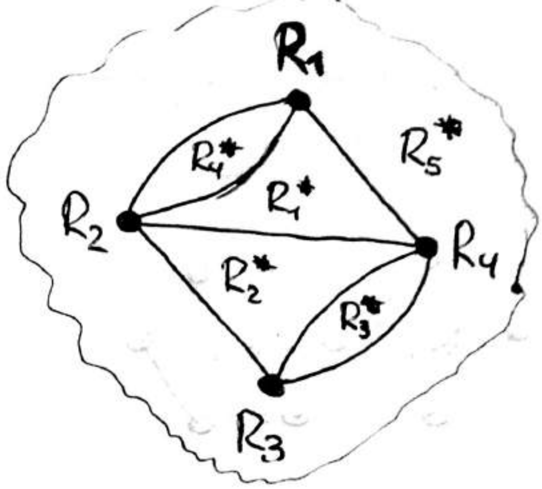
$$|V| - |A| + |R| = 2 + \{\text{nº ctes. conexas} - 1\}$$

$$2 = |V| - |A| + |R| \leq 15 - 30 + |R| \longrightarrow 2 \leq -15 + |R| \longrightarrow \boxed{17 \leq |R|}$$

Grafo dual G^* de un grafo planar G.

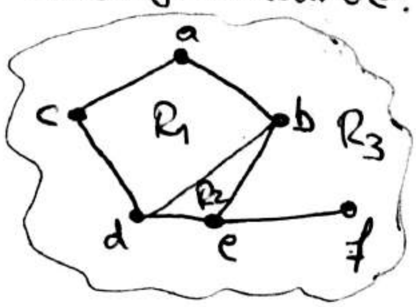


$\{a-b\} \rightarrow$ limita $\underline{R_3, R_4}$.
$\{b-c\} \rightarrow$ limita $\underline{R_1, R_4}$.
$\{c-e\} \rightarrow$ limita $\underline{R_2, R_4}$.
$\{e-a\} \rightarrow$ limita $\underline{R_3, R_4}$.
$\{c-d\} \rightarrow$ limita $\underline{R_1, R_2}$.
$\{d-b\} \rightarrow$ limita $\underline{R_1, R_2}$.
$\{e-b\} \rightarrow$ limita $\underline{R_2, R_3}$.

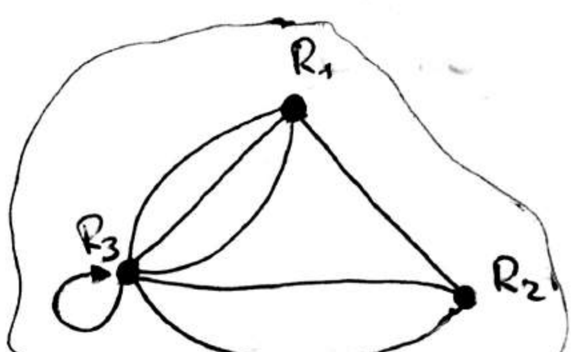


- Cada región (R_i) se identifica con un vértice en el grafo dual.
- Por cada arista (e) en el grafo que es frontera de dos regiones R_i, R_j se traza una arista en el grafo dual que une el vértice R_i con R_j.
- G^* puede ser multigrafo y tener bucles.

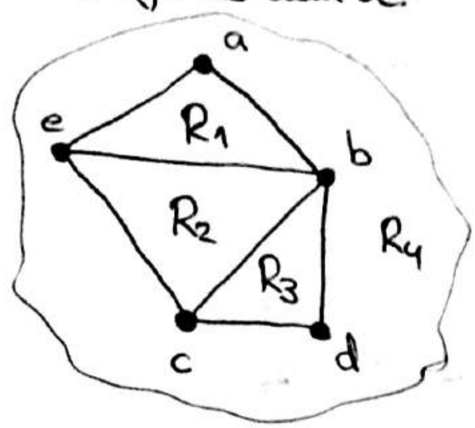
Construye el dual de:



$\{ab\} \longrightarrow R_1, R_3$.
$\{be\} \longrightarrow R_2, R_3$.
$\{de\} \longrightarrow R_2, R_3$.
$\{cd\} \longrightarrow R_1, R_3$.
$\{ac\} \longrightarrow R_1, R_3$.
$\{bd\} \longrightarrow R_1, R_2$.
$\{ef\} \rightarrow R_3, R_3$



Construye el dual de:



{ab} ⟶ R_1, R_4

{bd} ⟶ R_3, R_4

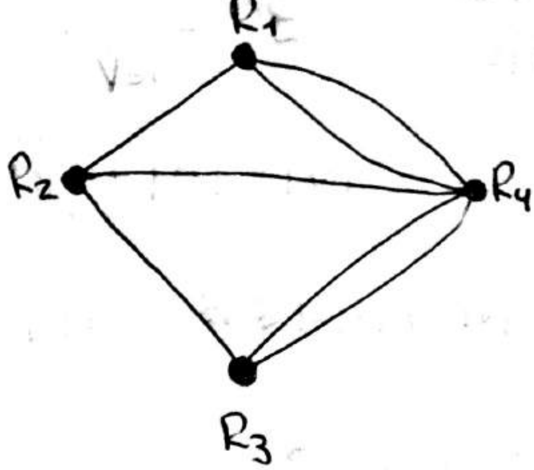
{dc} ⟶ R_3, R_4

{ce} ⟶ R_2, R_4

{ae} ⟶ R_1, R_4

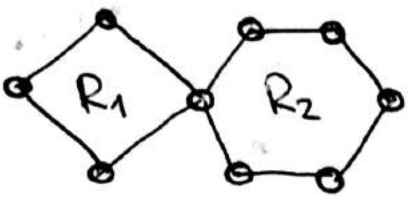
{be} ⟶ R_1, R_2

{bc} ⟶ R_2, R_3



Propiedad: Si G es un grafo conexo planar, entonces G es bipartido sí y sólo si G^* es euleriano

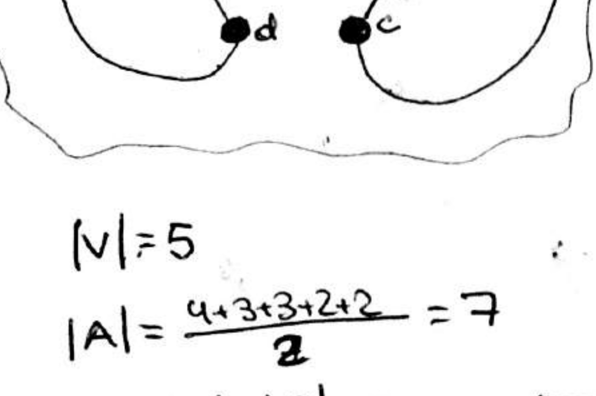
Demostración: G es bipartido sí y sólo si G no tiene ciclos de longitud impar.



Para que se cumpla la propiedad, el grado (R_i) es par para todas las regiones del grafo plano. Esto implica que G^* sea euleriano.

Ejercicio

Si un grafo conexo y plano tiene la sucesión de grados (4,3,3,2,2), ¿cuántos vértices tiene su grafo dual, G^*?



ab ⟶ R_2, R_3

bc ⟶ R_2, R_4

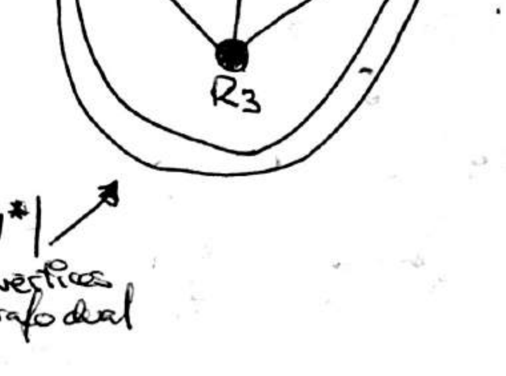
ae ⟶ R_1, R_3

be ⟶ R_3, R_4

de ⟶ R_1, R_4

ad ⟶ R_1, R_4

ac ⟶ R_2, R_4



$|V| = 5$

$|A| = \frac{4+3+3+2+2}{2} = 7$

$|V| - |A| + |R| = 2$

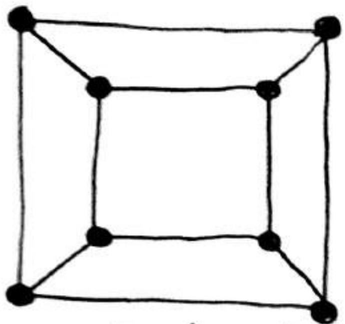
$5 - 7 + r = 2 \Longrightarrow \boxed{r = 4} = |V^*|$

nº vértices grafo dual

Grafo plano (G) vs. Grafo dual (G^*)

G	G^*
$\lvert V\rvert = n$	$\lvert V^*\rvert = r$
$\lvert A\rvert = q$	$\lvert A^*\rvert = q$
$\lvert R\rvert = r$	$\lvert R^*\rvert = n$
$\text{grado}(R_i) = \alpha_i$	$\text{grado}(R_i) = \alpha_i$

Poliedros regulares.



"n" vértices de grado "k".

Grafo plano

$\text{grado}(v_i) = k \quad \forall v \in \{\text{vértices del poliedro}\}$

$\text{grado}(R_i) = s \quad \forall R_i \in \{\text{regiones del poliedro}\}$

$|V| = n \quad ; \quad |A| = q \quad ; \quad |R| = r$

$n - q + r = 2$

- $q = \dfrac{n \cdot k}{2}$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \text{grado}(R_i) = r \cdot s = 2q = n \cdot k$

Sustitución.

$$n - \frac{n \cdot k}{2} + \frac{n \cdot k}{s} = 2 \xrightarrow{\text{quitar denominadores}} \frac{2sn}{2s} - \frac{nks}{2s} + \frac{2nk}{2s} = \frac{2 \cdot 2s}{2s} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2sn - nks + 2nk = 4s \longrightarrow n(2s - ks + 2k) = \underset{\vee}{4s} \qquad 4s > 0 \;; n > 0$$

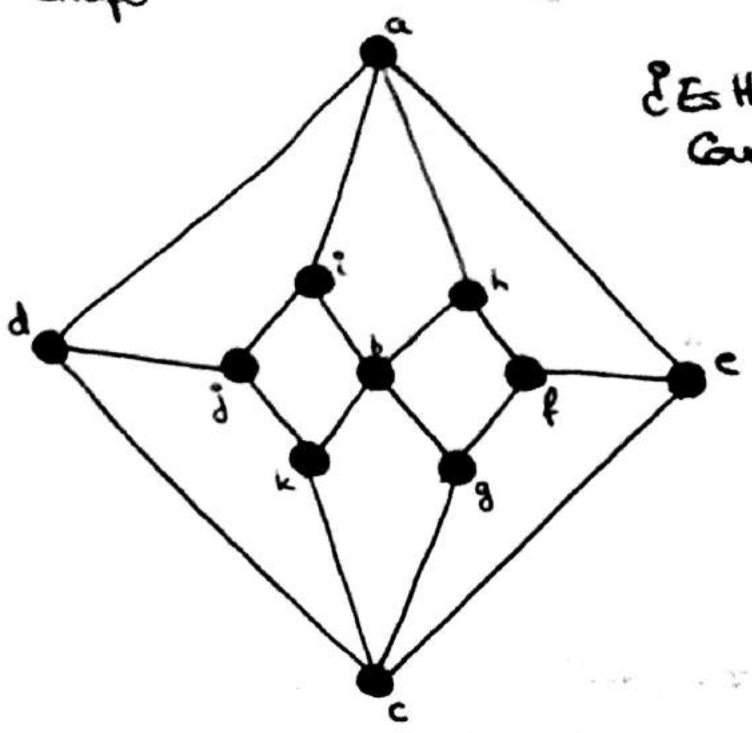
$$ks - 2s - 2k < 0$$

$$(k-2)(s-2) - 4 < 0 \longrightarrow \boxed{(k-2)(s-2) < 4}$$

Valores posibles.

s	k	n	q	r	nombre poliedro
3	3	4	6	4	tetraedro
3	4	6	12	8	octaedro
3	5	12	30	20	icosaedro
4	3	8	12	6	cubo
5	3	20	30	12	dodecaedro

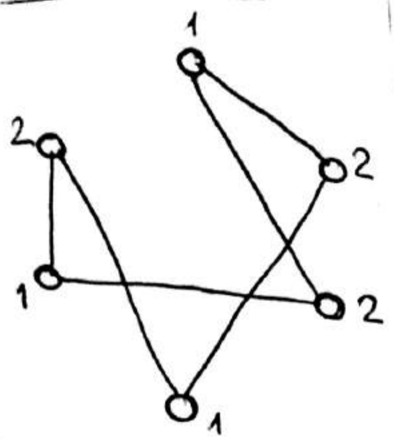
Grafo



¿Es Hamiltoniano?

Condición necesaria:

Coloración



Podemos decir que cada vértice es un producto químico, y los productos adyacentes no se pueden guardar en la misma sala. Se pide calcular el mínimo nº de salas con las que se puede respetar las normas.

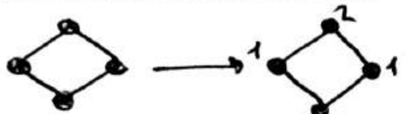
Def. Una coloración de un grafo simple G es una asignación de colores a sus vértices, vértices adyacentes reciben colores diferentes.

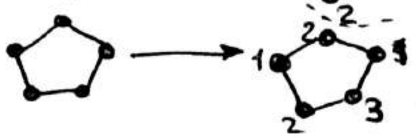
Si se usan "K" colores, se dice que es una "k-coloración."

Def. El número cromático, "$\chi(G)$", es el menor número "k" tal que G admite una k-coloración.

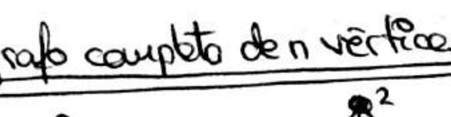
Ejercicio: Dar una coloración y su nº cromático

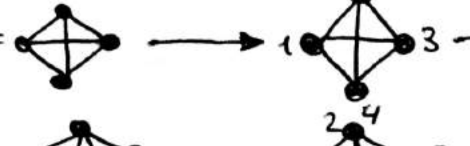
- C_n "círculo de n vértices"

$C_4 =$  $\longrightarrow \chi(C_4) = 2$

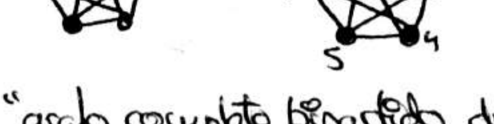
$C_5 =$  $\longrightarrow \chi(C_4) = 3$

- K_n "grafo completo de n vértices"

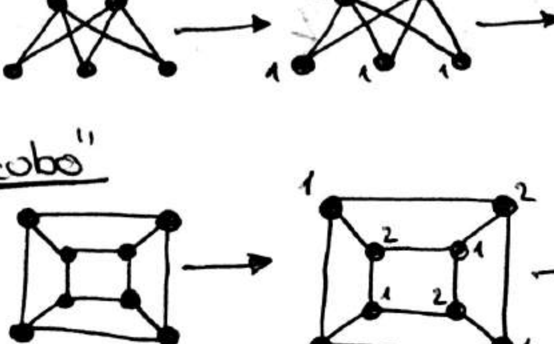
$K_4 =$  $\longrightarrow \chi(K_4) = 4$

$K_5 =$  $\longrightarrow \chi(K_5) = 5$

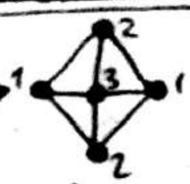
- $K_{r,s}$ "grafo completo bipartido de (r+s) vértices"

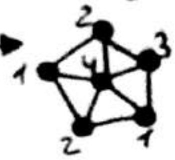
$K_{2,3} =$  $\longrightarrow \chi(K_{2,3}) = 2$

- Q_3 "cubo"

$Q_3 =$  $\longrightarrow \chi(Q_3) = 2$

• W_n "rueda de ciclo exterior de n vértices".

• $W_4 =$  $\longrightarrow$  $\longrightarrow \chi(W_4) = 3$

• $W_5 =$  $\longrightarrow$  $\longrightarrow \chi(W_5) = 4$

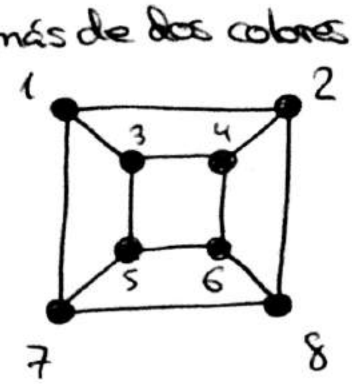
• Generalización:

Algoritmo secuencial de coloración.

Sea $v_1, v_2, \dots, v_n$ una ordenación de los vértices de G, y $C = \{1, \dots, n\}$ una lista de colores.

Iteración: Asignar el color 1 al vértice v_1. Si se han coloreado los vértices $v_1, \dots, v_{k-1}$ con j colores, entonces se asigna a v_k el mínimo color permitido t_k no asignado a sus vecinos.

Ejercicio: Dar una ordenación de los vértices tal que al aplicar ASC se usen más de dos colores.



Orden vértices →	1	6	3	4	5	2	7	8
Color →	1	1	2	3	3	2	2	3

→ 3-coloración.

Orden vértices →	1	2	6	8	4	5	7	3
Color →	1	2	1	3	3	**2**	4	4

→ 4-coloración

Criterio de ordenación de vértices.

- Primero el de mayor grado.

$$d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$$

- El de menor grado el último.
  - V_n (vértice de menor grado, y lo colocamos el último para colorear).
  - V_{n-1} (vértice de menor grado en el subgrafo $G-\{V_n\}$, y lo colocamos el penúltimo para colorear).
  - Así recursivamente.

Complejidad del algoritmo secuencial de coloración

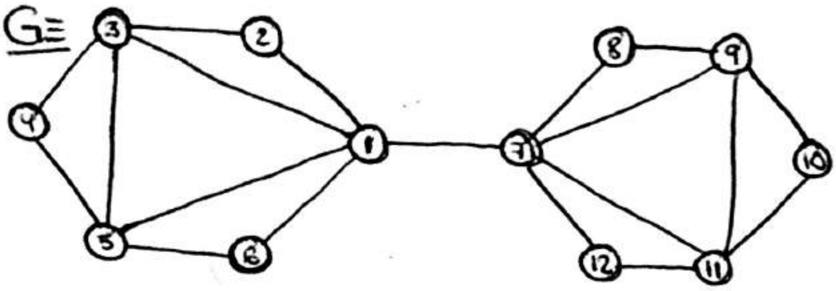
Conjuntos independientes.

Def: Un conjunto de vértices $S \subset V$ se dice que es independiente si no hay dos vértices en S que sean adyacentes.

Def: Se define el número de independencia de G, se denota $\beta(G)$, como el máximo cardinal de un conjunto independiente.

Def: Se dice que un conjunto independiente es maximal si no existe otro conjunto independiente que lo contenga como subconjunto propio.

Ejemplo:

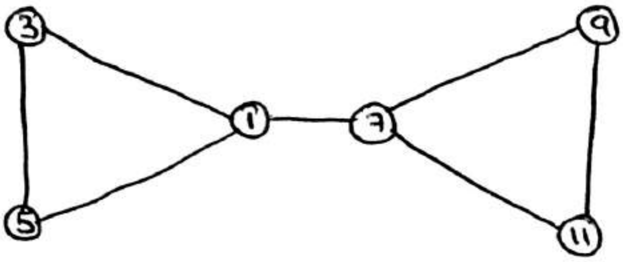
G≡


Coloración basada en la búsqueda de conjuntos independientes.

- S_1 es el conjunto independiente de cardinal máximo en G:

$S_1 = \{2,4,6,8,10,12\}$

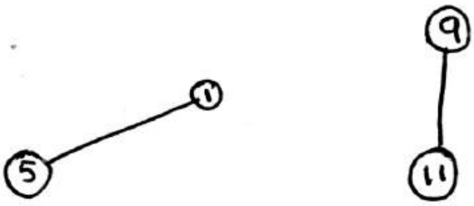
Eliminamos los vértices de "S_1" del grafo G, para obtener G':



- S_2 ~~es~~ el conjunto independiente de cardinal máximo en G':

$S_2 = \{3,7\}$

Eliminamos los vértices de "S_2" del grafo G', para obtener G'':



- S_3 es el conjunto independiente de cardinal máximo en G'':

$S_3 = \{1,11\}$

Eliminamos los vértices de "S_3" del grafo G'', para obtener G''':

Algoritmo de coloración de Brelaz.

Definición: Una clique en un grafo G es un subgrafo que es completo y maximal (no es subgrafo propio de otro subgrafo completo).

Se define el nº de clique de G, $\omega(G)$, como el máximo nº de vértices de una clique maximal.

$\omega(G) \leq \chi(G)$

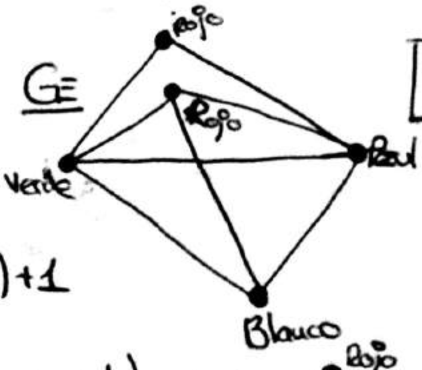
$\omega(G) = 4$ {rojo, verde, blanco, azul}

$\boxed{\Delta(G) = \text{máximo}\{d(v) : v \in V\}}$

Recordemos que:

$\frac{n}{\beta(G)} \leq \chi(G)$

G=



$\Delta(G) = 4$

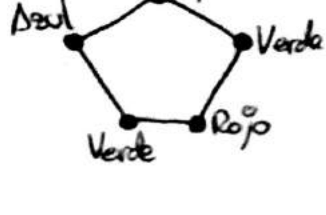
$\chi(G) = 4$

Se verifica que: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

$\Delta(G) = 4$ (máx. grado)

$\chi(G) = 5$.

SE CUMPLE.

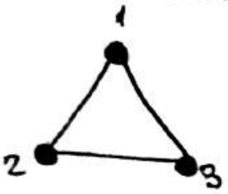


$\Delta(G) = 2$

$\chi(G) = 3$

SE CUMPLE.

Polinomio cromático.

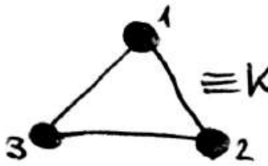


1	2	3
Rojo	Verde	Azul
Rojo	Azul	Verde
Verde	Rojo	Azul
Verde	Azul	Rojo
Azul	Rojo	Verde
Azul	Verde	Rojo

$P(G,t)$ es el nº de formas distintas de colorear los vértices de un grafo con "t" colores, cumpliendo que los vértices adyacentes entre sí reciben distintos colores.

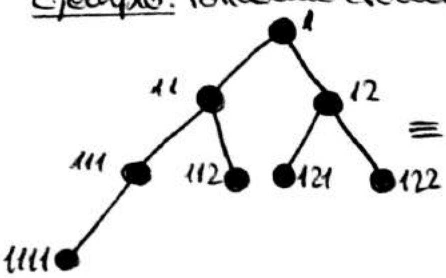
Ejemplo: Polinomio cromático de $K_n \rightarrow P(K_n,t) = t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+1)$

$t=4$ colores



$\equiv K_3 \rightarrow P(K_3,4) = 4\cdot3\cdot2 = \boxed{24}$ formas distintas.

Ejemplo: Polinomio cromático de un árbol $T \rightarrow P(T,t) = t\cdot(t-1)^{n-1}$

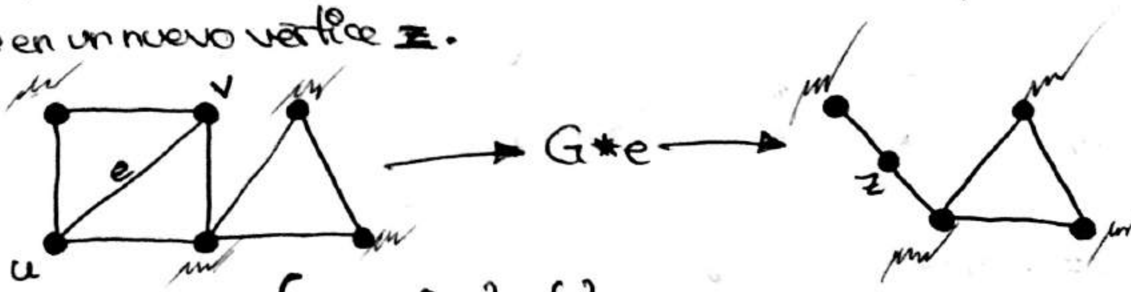


$\equiv T \rightarrow P(T,7) = 7\cdot6^6 =$

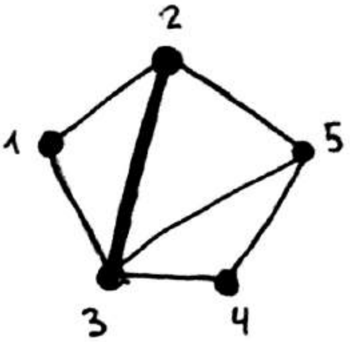
$t=7$ colores

Contracción de aristas.

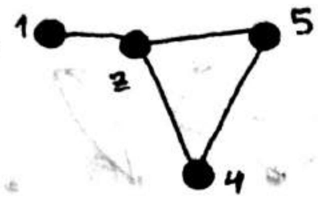
La operación $G*e$ (aplicada a un grafo G y un arista e) da como resultado el mismo grafo que teníamos en el cual los dos vértices $\underline{u}$, $\underline{v}$ que une el arista $\underline{e}$ se convierte en un nuevo vértice $\underline{z}$.



$$G*e = (V', A') \begin{cases} V' = V - \{u,v\} \cup \{z\} \\ A' = \{\{x,y\} \in A,\ \text{con } x,y \in \{u,v\}\} \cup \{\{z,x\} \text{ si } \{x,u\} \text{ ó } \{x,v\} \text{ es arista en } G\} \end{cases}$$

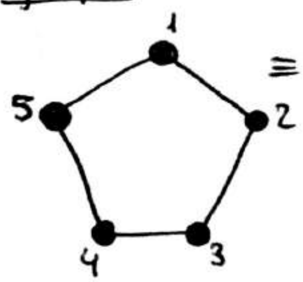


$\longrightarrow G * \{2,3\} \longrightarrow$



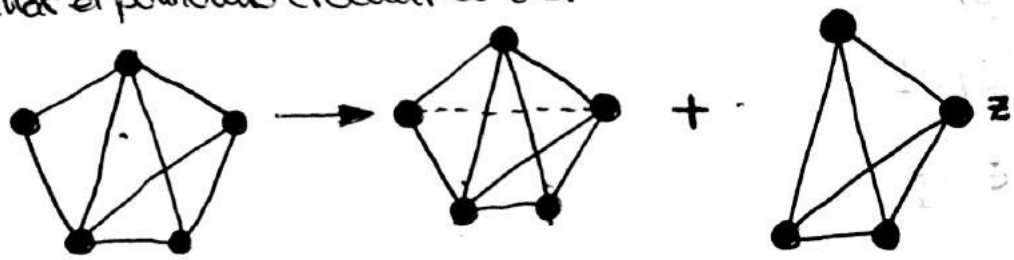
$$P(G-e,t) = P(G,t) + P(G*e,t)$$

<u>Ejemplo</u>: Polinomio cromático de un grafo circular, $C_n \longrightarrow P(C_n,t) =$

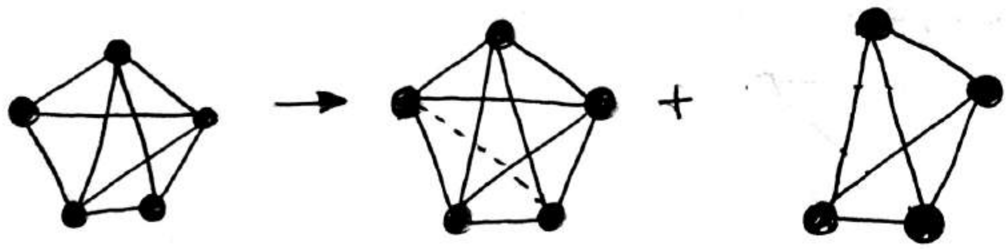


$\equiv C_5$

Hallar el polinomio cromático de:



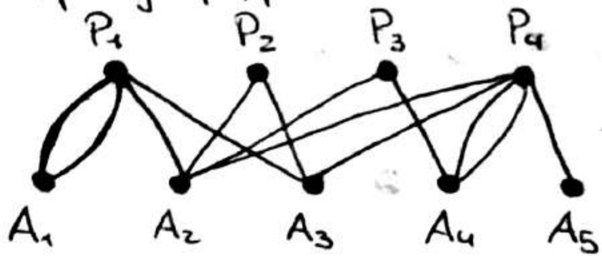
G-e G



K_4

Coloración de aristas.

Sirve, por ejemplo, para cuadrar horarios:



→ multigrafo.

Una k-coloración de aristas en una asignación de colores a las aristas, de modo que aristas adyacentes reciben colores distintos, y usando k-colores.

Índice cromático: $\chi'(G) = \min\{k_i : G \text{ tiene una k-coloración de aristas}\}$

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par.} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} (n-1) & \text{si } n \text{ es par.} \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si G es un grafo o multigrafo,

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$$

$$\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$$

Algoritmo secuencial

Ordenar las aristas

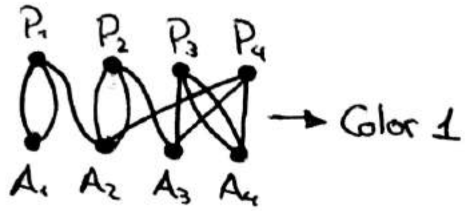
Colorear siguiendo en orden y usando el menor color permitido.

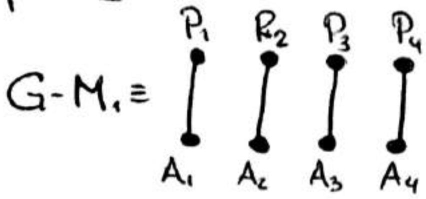
Algoritmo del emparejamiento

Las aristas de un mismo color forman un emparejamiento del grafo.

$K := 1$

1. Buscar un emparejamiento M de cardinal máximo y asignar a sus aristas el color k.
2. Repetir el procedimiento en el grafo $G-M$.
   - → Si no quedan aristas por colocar, FIN.
   - → En otro caso, $k := k+1$ y volver al paso 1.





Polinomio Cromático